Analysebericht 2011

Unterrichtsanregungen zu ausgewählten mathematischen Kompetenzen auf der Basis zentraler Leistungserhebungen im Fach Mathematik

SACHSEN-ANHALT

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung

Inhaltsverzeichnis

Seite

1 Vorbemerkungen

Zentrale Leistungserhebungen sind ein wichtiges Element der Qualitätssicherung an den Schulen unseres Bundeslandes. Die landesweite schulbezogene Erfassung der Ergebnisse der schriftlichen Abschlussprüfungen (RSA) im Schuljahrgang 10, der besonderen Leistungsfeststellung (bLF) im Schuljahrgang 9 und der zentralen Klassenarbeit (ZKA) im Schuljahrgang 6 bietet die Möglichkeit zur fundierten Bestandsaufnahme über Lernstände von Schülerinnen und Schülern. Die Auswertungsberichte zu den einzelnen zentralen Leistungserhebungen im Fach Mathematik sind auf dem Bildungsserver Sachsen-Anhalt[1] verfügbar.

Die Auswertungsberichte ermöglichen einen ersten Überblick über die Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler und erlauben es insbesondere den Lehrkräften, den Entwicklungsstand in ihren Lerngruppen mit den landesweiten Befunden in Beziehung zu setzen.
Mit dem „Analysebericht 2009 – Unterrichtsanregungen zu ausgewählten mathematischen Kompetenzen auf der Basis zentraler Leistungserhebungen im Fach Mathematik“[2] wurde erstmals eine tiefer gehende mathematikdidaktische Analyse zu Aspekten der Kompetenzentwicklung vorgelegt, die zugleich konkrete Unterrichtsanregungen enthält.

Mit dem vorliegenden Analysebericht 2011 wird dieses Anliegen fortgesetzt, um die inhaltliche Arbeit der Mathematiklehrkräfte und der Fachschaften Mathematik zu unterstützen.
Während die Auswertungsberichte sich jeweils nur auf genau eine zentrale Leistungserhebung beziehen, werden in den Analyseberichten **alle** zentralen Leistungserhebungen im Fach Mathematik der Sekundarstufe I über **mehrere** Schuljahre berücksichtigt.
Grundlage für die didaktische Einordnung der jeweiligen Aufgabe ist das Kompetenzmodell für den Mathematikunterricht in Sachsen-Anhalt[3].

[1] http://www.bildung-lsa.de/unterricht/zentrale_leistungserhebungen__schriftliche_pruefungen__zentrale_klassenarbeiten__vergleichsarbeiten______.html
[2] http://www.bildung-lsa.de/pool/zentrale_leistungserhebung/realschulabschluss/zle_mathe_2009_analysebericht.pdf
[3] http://www.bildung-lsa.de/unterricht/faecher/mathematik/sekundarschule/kompetenzmodell.html

Die Entwicklung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen ist untrennbar mit konkreten fachlichen Inhalten verbunden. Deshalb wurden für den vorliegenden Analysebericht folgende inhaltsbezogene Schwerpunkte gesetzt:

(1) Basiskompetenzen zu Zahlen und Größen

(2) Zuordnungen und Funktionen

Die Auswahl der Aufgaben erfolgte aus den Materialien der zentralen Leistungserhebungen der Schuljahrgänge 2007/08, 2008/09 und 2009/10 sowie aus zugehörigen Schülerlösungen. Neben der Einordnung der Aufgaben in das Kompetenzmodell für den Mathematikunterricht in Sachsen-Anhalt erfolgt eine qualitative Analyse von Schülerlösungen, um typische Fehler, Unvollständigkeiten bzw. Fehlvorstellungen herauszuarbeiten.

Die folgenden, zum Teil recht detaillierten fachdidaktischen Analysen erfolgen wohl wissend, dass die fachdidaktische Qualität des Mathematikunterrichts nur **ein** Einflussfaktor für den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler ist. Dieser ist einerseits nicht gering zu schätzen, zumal es der Bereich ist, den die Mathematiklehrkräfte unmittelbar beeinflussen können. Andererseits können Analysen des Lernerfolgs in einer Klasse die anderen Einflussfaktoren wie Lernbereitschaft der Schülerinnen und Schüler, Arbeitsatmosphäre im Unterricht, Fleiß und Gewissenhaftigkeit z. B. beim Erfüllen von Hausaufgaben, Vorleistungen usw. nicht ausblenden. Die Bedeutung dieser Aspekte für den Lernerfolg ist offenkundig.

Schließlich sei vorab auf ein weiteres grundsätzliches Problem jeglicher Analyse von angestrebten Unterrichtszielen und erreichten Lernergebnissen aufmerksam gemacht:
In diesem Bericht werden zu ausgewählten Aufgaben jeweils die Erfüllungsprozentsätze (Landesdurchschnitte) sowie die Streuung der dabei erreichten Schuldurchschnitte angegeben. Welche Aussagekraft haben diese Werte? An welchem Maßstab kann sich eine inhaltliche „Bewertung" orientieren? Ist bei einer Aufgabe ein landesdurchschnittlicher Erfüllungsprozentsatz von z. B. 65 % ein Ausdruck guter Schülerleistungen? Sicher hängt das auch von der Aufgabe ab, ebenso von der Population (mit Recht erwartet man an einem Gymnasium deutlich höhere Erfüllungsprozentsätze als an der Sekundarschule bei im Prinzip gleichen Aufgaben). Die Erfahrung zeigt, dass es jeweils deutliche „Überlappungen" gibt.

Es ist rein sachlich festzustellen, dass es dafür keinen allgemein anerkannten bzw. objektiven inhaltsbezogenen **quantitativen** Bewertungsmaßstab gibt.[4] Dennoch ist es nicht so, dass gar keine Orientierungsgrößen vorliegen. Zahlreiche Inhalte bzw. Unterrichtsziele des Mathematiklehrganges können sehr wohl differenziert beurteilt werden, sowohl hinsichtlich ihrer Stellung (z. B.: „basal - erweitert -vertieft“ oder „Grundaufgaben versus Anwendungsaufgaben“) als auch hinsichtlich der im Mittel mit bestimmten Schülergruppen erreichbaren Lernergebnisse. Bei letzterem verfügen Lehrkräfte über eine langjährige „kollektive“ Erfahrung. Dies zeigt sich u. a. darin, dass sie bei Einschätzungen von konkreten Anforderungen in hohem Maße übereinstimmen.[5] Auf letzteren Erfahrungswerten beruhen im Folgenden sehr bewusst „vorsichtige“ Einschätzungen und Interpretationen.

2 Analyseschwerpunkte

2.1 Basiskompetenzen zu Zahlen und Größen

Im Mathematikunterricht haben Basiskompetenzen für das Lernen eine besondere Bedeutung. Dies liegt vor allem am Charakter des mathematischen Bildungsgutes und am Aufbau des Mathematiklehrganges in der Schule, in dem sich die Inhalte stets auf Vorangehendes stützen. So ist z. B. ohne sicheres Rechnen mit Zahlen und Umformen von Termen ein sicheres Lösen von linearen Gleichungen nicht zu erreichen, und ohne erworbene Kompetenzen im Lösen von linearen Gleichungen kann das Lösen linearer Gleichungssysteme nicht angeeignet werden, und ohne das Lösen von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen ist das erfolgreiche Lösen von Anwendungsaufgaben kaum denkbar und so weiter und so weiter ...

Diese mathematikspezifische **„Vertikalstruktur“** der Inhalte macht das Beherrschen von Vorleistungen zur unverzichtbaren Voraussetzung für das Lernen im Fach Mathematik. Ist bei einer Schülerin oder einem Schüler der „Faden gerissen“, dann sind seine Bemühungen, „neuen“ Stoff zu verstehen, auf „Sand gebaut“. Erst wenn es gelingt, die betreffenden Lücken zu erkennen (!) und zu schließen, dann sind notwendige Bedingungen für das Weiterlernen gegeben.

[4] Die Arbeiten des IQB im Zusammenhang mit den Vergleichsarbeiten (VERA 8) sowie die vorliegenden Befunde in den so genannten Kompetenzstufenmodellen gehen sehr wohl in die Richtung, empirisch abgesicherte „Standards“ zu entwickeln. Allerdings ist dieses Ziel bei weitem nicht erreicht.

[5] Bei der Frage nach dem „Schwierigkeitsgrad“ der Prüfungsarbeit 2010 für den Erwerb des Realschulabschlusses schätzten z. B. 88 % der Befragten die Arbeit als „angemessen“ ein (auf einer fünfstufigen Skala).

Innerhalb der Basiskompetenzen nimmt das **Rechnen mit gebrochenen Zahlen** eine zentrale Stellung ein.

Das „Rechnen mit gebrochenen Zahlen“ stellt selbst eine außerordentlich „komplexe“ Kompetenz dar, wie folgende (vermutlich unvollständige) Auflistung von Teilkompetenzen belegt:

(1) „Rechnen mit natürlichen Zahlen“: vergleichen, ordnen, veranschaulichen, runden, „Kopfrechnen“, schriftlich rechnen, Überschläge ausführen, Rechenvorteile nutzen, ggT und kgV ermitteln, …

(2) „Rechnen mit gleichnamigen Brüchen und Dezimalbrüchen“: vergleichen, ordnen, veranschaulichen, addieren, subtrahieren, Dezimalbrüche multiplizieren, Brüche erweitern und kürzen, Zehnerbrüche und Dezimalbrüche ineinander umwandeln, …

(3) gebrochene Zahlen der Situation angemessen darstellen

(4) verschiedene Darstellungsformen gebrochener Zahlen ineinander umwandeln und beim Rechnen vorteilhaft nutzen

(5) Rechenausdrücke, in denen mehrere gebrochene Zahlen und Operationen vorkommen, berechnen

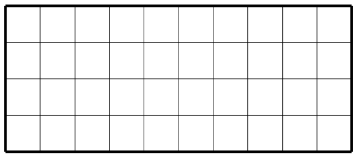
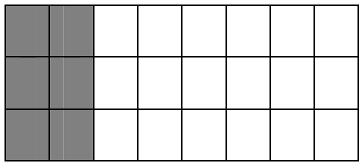
Diese Beschreibung der Basiskompetenz „Rechnen mit gebrochenen Zahlen“ verdeutlicht, dass zum einen ihre Entwicklung außerordentlich aspektreich ist. Allerdings stehen die Aspekte nicht beziehungslos nebeneinander, sondern durchdringen sich gegenseitig.

Zum anderen erklärt die Komplexität dieser Basiskompetenz, dass nicht wenige Schülerinnen und Schüler beim Lösen entsprechender Aufgaben nicht stabil erfolgreich sind.

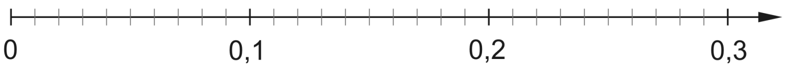
Folgende Befunde aus den zentralen Leistungserhebungen der Vorjahre 2008 bis 2010 zeichnen hier ein recht differenziertes Bild:

<u>Beispiel 1:</u> gebrochene Zahlen darstellen und veranschaulichen

Beispiel 1.1

ZLE	Aufgabenstellung	EFP[6] [Streuung] [7]
ZKA 6 (Sek) 2009	<u>Aufgabe 1d</u> Färbe $\frac{2}{5}$ des Rechtecks. 	60 % [48 % - 83 %]
ZKA 6 (Sek) 2010	<u>Aufgabe 1a</u> Gib einen Bruch für den Anteil der grau gefärbten Fläche an. 	80 % [59 % - 93 %]

Beispiel 1.2

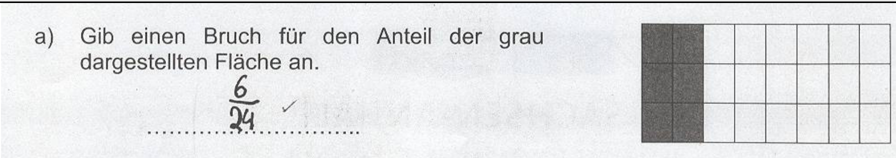
ZLE	Aufgabenstellung	EFP [Streuung]
ZKA 6 (Gym) 2009	<u>Aufgabe 1g</u> Stelle die gebrochenen Zahlen 0,01 sowie $\frac{13}{100}$ am Zahlenstrahl dar. 	
	Darstellen von 0,01	93 % [87 % - 97 %]
	Darstellen von $\frac{13}{100}$	81 % [71 % - 90 %]

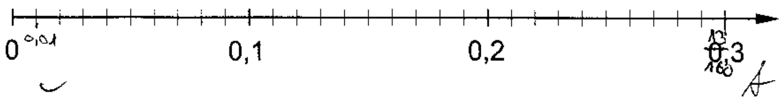
<u>Einordnung der Aufgabe in das Kompetenzmodell</u>

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$			E Ē	P	M	A	D
x							2

imK:
Beispiel 1.1: gebrochene Zahlen veranschaulichen bzw. aus Veranschaulichung erkennen
Beispiel 1.2: gebrochene Zahlen am Zahlenstrahl darstellen

6 EFP: Erfüllungsprozentsatz – Landesmittelwert
7 In den eckigen Klammern stehen der kleinste und der größte Erfüllungsprozentsatz von 90 % aller erfassten Schulen (90 % - Perzentilband).

Schülerlösung zum Beispiel 1.1	Fehleranalyse
 a) Gib einen Bruch für den Anteil der grau dargestellten Fläche an. $\frac{6}{24}$ ✓	Der Anteil der dargestellten Fläche wird richtig ermittelt. Der Bruch wird jedoch nicht gekürzt.

Schülerlösung zum Beispiel 1.2	Fehleranalyse
	Nur der Dezimalbruch wird richtig eingetragen. Eine Umwandlung des gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch erfolgt nicht.

<u>Beispiel 2</u>: gebrochene Zahlen vergleichen

ZLE	**Aufgabenstellung**	**EFP [Streuung]**
ZKA 6 (Gym) 2010	<u>Aufgabe 1a</u> Vergleiche und setze das richtige Zeichen (< ; = ; >) ein. $0{,}59 \ldots\ldots\ \frac{3}{5}$	85 % [72 % - 94 %]
ZKA 6 (Sek) 2010	<u>Aufgabe 1b</u> Vergleiche und setze das richtige Zeichen (< ; = ; >) ein. $0{,}2 \ldots\ldots\ \frac{1}{5}$	53 % [29 % - 76 %]

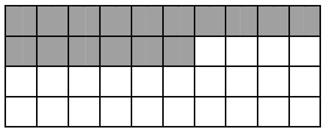
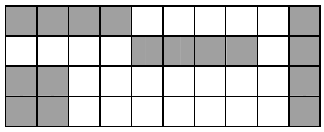
<u>Einordnung der Aufgabe in das Kompetenzmodell</u>

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
x				**3**			

imK: gebrochene Zahlen vergleichen

Im Beispiel 1.1 fällt sofort der deutliche Unterschied der Erfüllungsprozentsätze der Aufgaben 1a (Bruch aus Veranschaulichung ermitteln) und 1d (Bruch veranschaulichen) auf. Eine Analyse der Aufgabe zeigt, dass die kognitive Anforderungsstruktur der Aufgabe 1d komplexer als die von 1a ist.
Bei Aufgabe 1a ist in einem „3 mal 8 - Rechteck“ (Nenner) eine Fläche (Zähler) vorgegeben. Die Schülerinnen und Schüler brauchen lediglich direkt auszuzählen.
Dagegen ist bei Aufgabe 1d das gegebene „4 mal 10 - Rechteck“ (Nenner) erst in Beziehung zum Bruch $\frac{2}{5}$ zu setzen. Dafür ergeben sich verschiedene Möglichkeiten. Einerseits kann der Bruch so erweitert werden, dass ein Bruch mit dem Nenner 40 entsteht, um dann 16 kleine Quadrate zu markieren. Andererseits kann das Rechteck zunächst in fünf gleiche Teile geteilt werden, um dann zwei davon zu markieren.
Schließlich gibt es nicht nur diese beiden grundsätzlichen Lösungsstrategien, sondern auch recht verschiedene richtige Möglichkeiten, 16 kleine Quadrate in diesem Rechteck zu färben.
Aufgaben dieser Art sind für das inhaltliche Verständnis im Umgang mit gebrochenen Zahlen wichtig. Daher sollten sie im Mathematikunterricht immer wieder vorkommen. Schülerinnen und Schüler, die diesbezüglich unsicher sind, sollten aufgefordert werden, ihren Lösungsweg zu begründen. Es kommt gar nicht so sehr auf viele verschiedene Aufgaben an, sondern eher auf das Erkennen von inhaltlichen Gemeinsamkeiten verschiedener Lösungen bzw. Lösungswege.

Aufgabenbeispiel:

Grit hat nebenstehend den Bruch $\frac{2}{5}$ dargestellt.	
Konrad hat diesen Bruch so dargestellt.	
Beurteile beide Lösungen. Wie würdest du den Bruch $\frac{2}{5}$ veranschaulichen? Gib mehrere Möglichkeiten an.	

Beim Beispiel 1.2 kann festgestellt werden, dass beim Darstellen von „einfachen“ gebrochenen Zahlen am Zahlenstrahl recht hohe Erfüllungsprozentsätze bei verhältnismäßig geringer Streuung erreicht werden.
Fachdidaktisch ist auffällig, dass im Beispiel 1.2 eine „kleine“ Veränderung der Aufgabe (nämlich eine gebrochene Zahl in Form eines Zehnerbruches an der dezimal geteilten Zahlengeraden darzustellen) zu einem deutlichen Absinken der Erfüllungsprozente führt und sich die Streuung dabei verdoppelt.
Natürlich wird dies mit Sicherheit davon beeinflusst, dass beim Darstellen des Zehnerbruches an diesem dezimal geteilten Zahlenstrahl ein gedanklicher Schritt hinzukommt: Umwandeln des Zehnerbruches in einen Dezimalbruch. Insofern ist das Absinken des Erfüllungsprozentsatzes „leicht“ zu erklären.

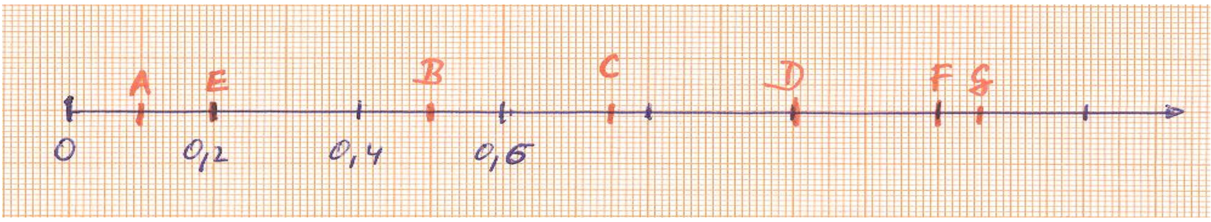
Welche Einsichten oder Ansatzpunkte für die praktische Unterrichtsarbeit ergeben sich daraus?
Zunächst sollte man sich bewusst machen, dass hier eine sehr „neuralgische Stelle“ im Mathematiklehrgang angesprochen ist, und zwar der Begriff „gebrochene Zahl“ (ein und dieselbe Zahl kann durch verschiedene Darstellungsformen repräsentiert werden). Dazu gehören: Brüche (in verschiedenen Qualitäten wie echte, unechte; Zehnerbrüche) und Dezimalbrüche (endliche, unendlich periodische). Diese Vielfalt muss beherrscht werden, wenn darauf aufbauend gebrochene Zahlen verglichen oder mit ihnen gerechnet werden soll. Aus dieser Einsicht könnte folgen, dass das Ineinanderumwandeln der verschiedenen Darstellungsformen im 6. Schuljahrgang immer wieder geübt werden muss. Allerdings sollten die Übungsaufgaben nach einem gewissen Grundverständnis für das Ineinanderumwandeln sehr vielfältig variieren, so dass formalem Arbeiten vorgebeugt wird.

Aufgabenbeispiele:

A) Vervollständige den Zahlenstrahl so, dass er von 0 bis 1 geht und sowohl Zehnerbrüche als auch Dezimalbrüche markiert sind.

					0,5	0,6				1
				$\frac{4}{10}$						

B) Lies vom Zahlenstrahl die markierten Zahlen ab und vervollständige die Tabelle.

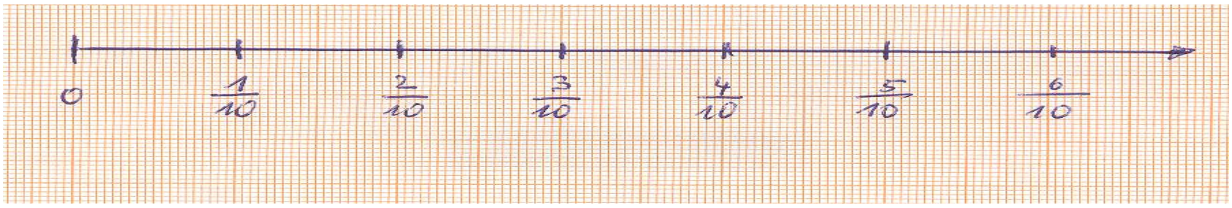


Markierung	A	B	C	D	E	F	G
Dezimalbruch							
Zehnerbruch							
ggf. gekürzter Bruch							

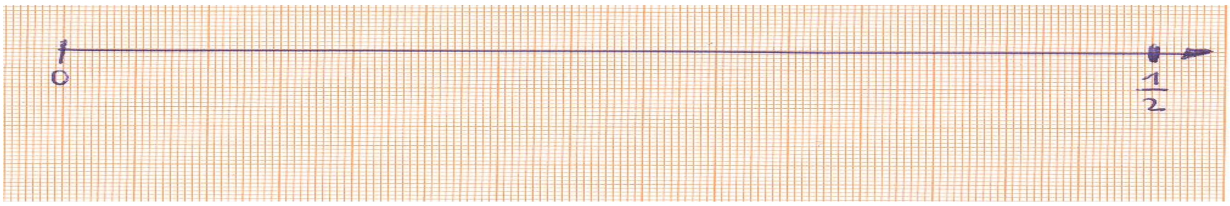
C) Stelle folgende gebrochenen Zahlen an den Zahlenstrahlen (I) und (II) dar.

$0{,}2\ ;\ \frac{1}{100}\ ;\ \frac{10}{100}\ ;\ 0{,}15\ ;\ 0{,}33\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;0{,}401;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{300}{1000}$

Zahlenstrahl (I)



Zahlenstrahl (II)



Die drei Aufgabenbeispiele verdeutlichen folgende Gestaltungsprinzipien:

- Das Zahlenmaterial konzentriert sich auf das Intervall [0; 2], wobei immer wieder „die Standardbrüche“ $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ vorkommen.
- Es wird stets Wert auf verschiedene, aber gleichwertige Darstellungsformen gelegt.
- Unterschiedlich geteilte Zahlenstrahlen sollen für die jeweils gewählte Einheit sensibilisieren.
- Die „Handlungsrichtungen“ wechseln, so dass die Schülerinnen und Schüler gezwungen sind, inhaltlich die Aufgabe zu durchdringen und dadurch sich die Wahrscheinlichkeit erhöht, dass sie sich auf diese Weise ein adäquates „inneres Modell“ strukturieren.

Das Beispiel 2 ist gewissermaßen ein Beleg der einleitenden Aussagen zu den Basiskompetenzen: Sicherheit beim Ineinanderumwandeln verschiedener Darstellungsformen gebrochener Zahlen führt zur höheren Erfolgswahrscheinlichkeit beim Vergleichen gebrochener Zahlen verschiedener Darstellungsformen (Vergleich der Ergebnisse am Gymnasium mit denen an der Sekundarschule).

Und eine zweite Aussage erscheint aufgrund der Streuung der schulischen Erfüllung (Die Spanne beträgt bei der ZKA 2010 an Sekundarschulen rund 50 %!) plausibel. Es gelingt offenbar an nicht wenigen Sekundarschulen, auch bei diesen Aufgaben im Vergleich zu anderen Sekundarschulen eine deutlich bessere Erfolgsquote zu erreichen.

Beispiel 3

ZLE	Aufgabenstellung	EFP [Streuung]
ZKA 6 (Sek) 2008	Aufgabe 1d Mache die folgenden Brüche gleichnamig. $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{8}$	39 % [13 % - 71 %]
ZKA 6 (Sek) 2009	Aufgabe 1c Kürze soweit wie möglich. $\frac{24}{36} =$	74 % [55 % - 92 %]

Einordnung der Aufgabe in das Kompetenzmodell

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
x				3			

imK: Brüche gleichnamig machen; Brüche kürzen

Die Erfüllungsprozentsätze im Beispiel 3 weisen auf offensichtlich deutlich unterschiedliche Schwierigkeitsgrade[8] hin. Zusätzlich streuen die schulischen Erfüllungen bei „schwierigen“ Aufgaben deutlich stärker als bei „leichteren“.

Wie können diese Effekte erklärt und welche Folgerungen gezogen werden?

Der Lösungsweg zu Aufgabe 1c (Kürzen) besteht im Wesentlichen aus zwei Schritten: Erkennen des ggT[9] von Zähler und Nenner und beide durch diesen ggT dividieren (bei Nichterkennen des ggT erhöht sich die Anzahl der Lösungsschritte).

[8] Der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe wird dadurch bestimmt, wie viele Personen die Aufgabe richtig gelöst haben. Die erreichten Erfüllungsprozente sind somit ein Maß für den Schwierigkeitsgrad der jeweiligen Aufgabe.

[9] ggT steht für „größter gemeinsamer Teiler“.

Bei Aufgabe 1d (Gleichnamigmachen) ist zunächst der Hauptnenner (kgV[10] der Nenner) zu ermitteln, dann sind jeweils die zugehörigen Erweiterungsfaktoren zu bestimmen und schließlich noch die Zähler entsprechend zu multiplizieren.

Während beim Kürzen kleinere Zahlen entstehen, werden beim Gleichnamigmachen die Zahlen größer, d. h., der Rechenaufwand steigt (das um so mehr, wenn nicht der kleinste gemeinsame Nenner ermittelt wird).

Diese theoretische Analyse der Anforderungen bestätigt den Unterschied des Schwierigkeitsgrades beider Aufgaben. Allerdings vermag sie nicht die enormen Unterschiede der Erfolgsquoten verschiedener Sekundarschulen zu erklären. Die Erfüllungsprozentsätze schwanken zwischen 13 % und 71 %.

Beispiel 4: mit gebrochenen Zahlen rechnen

ZLE	Aufgabenstellung	EFP [Streuung]
ZKA 6 (Gym) 2008	Aufgabe 1a Berechne. $1\frac{3}{4} - 0{,}5$	83 % [71 % - 93 %]
ZKA 6 (Gym) 2009	Aufgabe 1d Berechne. $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} - 0{,}2$	84 % [76 % - 94 %]
ZKA 6 (Sek) 2008	Aufgabe 1a Berechne. (1) $1{,}24 - 0{,}4$ (2) $3 + 6 \cdot \frac{1}{3}$	70 % [29 % - 100 %]
ZKA 6 (Sek) 2009	Aufgabe 1a Berechne. (1) $\frac{5}{4} - \frac{3}{8}$ (2) $\frac{1}{2} + 0{,}1$	60 % [36 % - 81 %]
ZKA 6 (Sek) 2010	Aufgabe 1c Berechne. $5{,}673 - 0{,}812$	81 % [65 % - 93 %]

Einordnung der Aufgabe in das Kompetenzmodell

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$			E Ē	P	M	A	D
x				3			

imK: Grundrechenoperationen mit gebrochenen Zahlen ausführen

Die im Beispiel 4 zu bearbeitenden Aufgaben repräsentieren einen Mindeststandard. Bei genauer Betrachtung der Aufgaben wird dies besonders deutlich.

[10] kgV steht für „kleinstes gemeinsames Vielfaches“.

Die beiden Aufgaben für das Gymnasium sind so gestellt, dass nicht vordergründig das Rechnen, sondern das Erkennen der Darstellungsformen ($\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{5} = 0{,}2$) betont wird. Von daher ist der Schwierigkeitsgrad eher gering und die Erfüllungsprozentsätze am Gymnasium sollten durchweg oberhalb von ca. 90 % liegen. Ein Teil der Schulen erreicht diese Zielmarke, eine nennenswerte Anzahl nicht, wie die Streuungen erkennen lassen.

Bei den Aufgaben, die in der Sekundarschule im Jahr 2008 gestellt sind, schwanken die Erfüllungsprozentsätze am stärksten. Hier kommen „typische“ Fehler zum Tragen. Bei Aufgabe (1) führt ein typischer Fehler zum Ergebnis 1,20 (Nichtbeachten der Stellenwerte, suggestiv durch die Zahl 0,4 verstärkt) und bei Aufgabe (2) signalisiert das Ergebnis 3 das Nichtbeachten der Vorrangregeln. Vor diesem Hintergrund erscheint es beachtlich, dass ein Teil der Schulen auch bei diesen Aufgaben vergleichsweise hohe Erfüllungsprozentsätze erreicht hat.

Bei Anforderungen, wie sie die Aufgaben der Sekundarschule aus den Jahren 2009 und 2010 stellen, müsste im Mittel eine höhere Erfolgssicherheit bei relativ geringer Streuung erreicht werden. Dass die Streuung sehr hoch ist, ergibt sich daraus, dass sich eine mangelnde Kompetenzentwicklung in diesem Bereich stark negativ (und das nachhaltig!) auf das Lernen im Mathematikunterricht und die darauf aufbauende Kompetenzentwicklung auswirkt.

Diese Zusammenhänge erkennend, sollte sehr gezielt an einer Überwindung bestehender Schwächen einzelner Schülerinnen und Schüler, aber auch in der Lerngruppe insgesamt, gearbeitet werden.

Dazu gehört, dass regelmäßig gezielt solche Aufgaben (insbesondere unter Einbeziehung von „Standardbrüchen“) gestellt werden und bewusst immer wieder die Aufmerksamkeit auf die Überwindung der typischen Fehler gelenkt wird. Die „erfolgreichen“ Schulen zeigen (sichtbar an hohen Erfolgsquoten innerhalb der Streuungsbreite), dass es geeignete Wege gibt.

Ein unverzichtbarer Weg zur kontinuierlichen Sicherung von Basiskompetenzen sind und bleiben die **Täglichen Übungen**, deren Effekt um so größer ist, je abgestimmter sie in der Fachschaft von allen Mathematiklehrkräften in allen Schuljahrgängen praktiziert werden. Erprobte Empfehlungen zur methodischen und fachdidaktischen Gestaltung sind im Beitrag auf dem Bildungsserver „Tägliche Übungen im Mathematikunterricht – Unverzichtbare Methode zur Sicherung von Basiskompetenzen – Erprobte Empfehlungen zur effektiven Gestaltung“[11] zu finden.

[11] http://www.bildung-lsa.de/files/52a60e2e173132c4a00746c2fc98d87a/taegl_ueb_empfehl.pdf

2.2 Zuordnungen und Funktionen

Funktionen gehören zu den wichtigsten mathematischen Objekten überhaupt. Sie stellen ein unverzichtbares Hilfsmittel zur Beschreibung von Vorgängen im Alltag, in der Natur, in der Technik usw. dar. Der Mathematikunterricht steht dabei in der Verantwortung, den Schülerinnen und Schülern den sicheren Umgang mit Grundlagen und Anwendungen zu diesem Thema zu vermitteln. Schülerinnen und Schüler zum funktionalen Denken zu führen bedeutet, sie zu befähigen, in unterschiedlichen Situationen Zusammenhänge funktional zu erfassen, sie quantitativ zu beschreiben und auf Fragestellungen, die sich mit Funktionen modellieren lassen, Antworten zu finden.

Bei der Entwicklung funktionalen Denkens stehen im Mathematikunterricht bis zum Schuljahrgang 8 zunächst zwei Aspekte im Vordergrund: erstens der Zuordnungscharakter von Funktionen (Größen werden als abhängig voneinander beschrieben, z. B. Ware → Preis) und zweitens das Änderungsverhalten von Funktionen (Größen verändern sich miteinander, z. B. wenn eine Größe verdoppelt wird, verdoppelt sich auch die andere).

Lange bevor Schülerinnen und Schüler die Bedeutung des Wortes „Funktion“ kennen, nutzen sie im Mathematikunterricht Zusammenhänge, Beziehungen, Abhängigkeiten und deren Darstellungsmöglichkeiten (z. B. beim Umgang mit Maßstäben, beim Ausfüllen von Tabellen oder bei der Behandlung der direkten Proportionalität.). So ist auch das Aufstellen von Formeln und Gleichungen in der Geometrie (z. B. $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$) eine gute Vorbereitung für funktionales Denken, denn Schülerinnen und Schüler lernen dabei eine wichtige Darstellungsart von funktionalen Zusammenhängen kennen.

Erst ab dem Schuljahrgang 8 erfolgt die Sicht auf Funktionen als Ganzes[12]. Ausgehend vom Begriff „Zuordnung“ sollen Schülerinnen und Schüler Funktionen in verschiedenen Funktionsklassen (z. B. lineare und quadratische Funktionen, Winkelfunktionen, Potenz- und Exponentialfunktionen) und deren Eigenschaften (z. B. Nullstellen, Monotonie, Periodizität, usw.) erfassen und mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen vertraut sein.

[12] Vgl. Vollrath, H.-J.: Algebra in der Sekundarstufe. Hrsg.: Knoche, N./Scheid, H. Wissenschaftsverlag. Mannheim 1994.

Bei der Analyse ausgewählter Aufgaben aus den zentralen Leistungserhebungen der Vorjahre 2008 bis 2010 zum Thema „Zuordnungen und Funktionen“ stehen die drei Aspekte des funktionalen Denkens

(1) Zuordnungscharakter (vgl. Beispiel 5)
(2) Änderungsverhalten (vgl. Beispiel 6)
(3) Funktionen als Ganzes (vgl. Beispiele 7 und 8)

im Mittelpunkt.

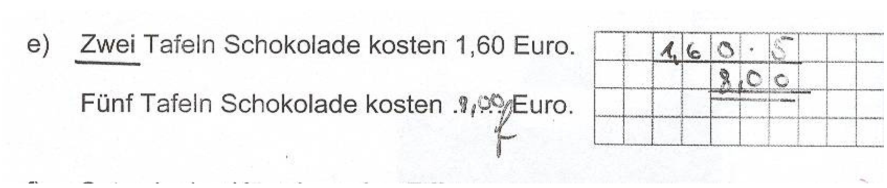
Beispiel 5: Sachproblem mithilfe von proportionalen Zuordnungen lösen

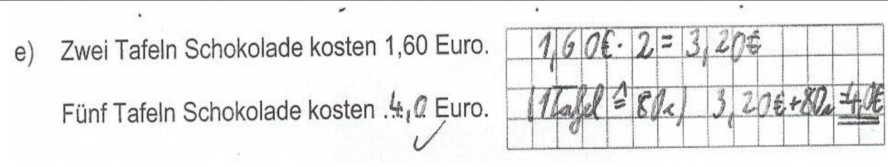
ZLE	Aufgabenstellung	EFP [Streuung]
ZKA (Sek) 2009	Aufgabe 8 In den folgenden Aufgaben liegt jeweils direkte Proportionalität vor. Berechne und vervollständige. a) 5 Tafeln Schokolade wiegen 600 g. Eine Tafel Schokolade wiegt ……… g. 7 Tafeln Schokolade wiegen ……… g.	81 % [67 % - 93 %] 73 % [57 % - 89 %]
ZKA (Gym) 2010	Aufgabe 1e Zwei Tafeln Schokolade kosten 1,60 Euro. Fünf Tafeln Schokolade kosten …… Euro.	70 % [56 % - 82 %]

Einordnung der Aufgabe in das Kompetenzmodell

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$			E Ē	P	M	A	D
		x		3	4		

imK: Masse bzw. Preis in Sachsituation berechnen

Schülerlösung 1 zur Aufgabe 1e	Kommentar
 e) Zwei Tafeln Schokolade kosten 1,60 Euro. Fünf Tafeln Schokolade kosten 8,00 Euro. f 1,60 · 5 8,00	Der Preis von zwei Tafeln (1,60 Euro) wird verfünffacht. Es wird nicht reflektiert, dass damit der Preis von zehn Tafeln ermittelt wird.

Schülerlösung 2 zur Aufgabe 1e	Kommentar
 e) Zwei Tafeln Schokolade kosten 1,60 Euro. Fünf Tafeln Schokolade kosten 4,0 Euro. 1,60€ · 2 = 3,20€ (1 Tafel ≙ 80c) 3,20€ + 80c = 4,0€	Zunächst wird der Preis von vier Tafeln richtig ermittelt und dann wird der Preis von einer Tafel dazu addiert.

Im Beispiel 5 sind die Erfüllungsprozentsätze der Aufgabe 8 höher als die der Aufgabe 1e. Ein Vergleich beider Aufgaben liefert dafür auch eine mögliche Begründung. Die Sachsituationen unterscheiden sich zunächst nur durch die Größen. Sie sind in gleicher Weise dargestellt. Die Aufgabe 8 enthält aber bereits wichtige Informationen zum Zusammenhang der Größen Anzahl und Masse (direkte Proportionalität) sowie zum Lösungsweg (Dreisatz). Bei der Aufgabe 1e müssen die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang zwischen den Größen Anzahl und Preis erkennen und geeignete Verfahren zur Lösung auswählen. Die Anforderungen der Aufgabe 1e sind somit komplexer.

Aufgaben dieser Art sind für die Behandlung des Funktionsbegriffs von besonderer Bedeutung, da die Abhängigkeit zwischen Größen verwendet wird, bevor der Funktionsbegriff algebraisch und symbolisch behandelt wird. In der Schülerlösung 1 zur Aufgabe 1e wird deutlich, dass elementare funktionale Vorstellungen (z. B. Monotonie) enthalten sind. Da die Anzahl der Tafeln erhöht wird, muss auch der Preis höher sein (Monotonie). Auch die Schülerlösung 2 zu dieser Aufgabe zeigt Ansätze funktionaler Überlegungen. Der Preis für fünf Tafeln wird inhaltlich ermittelt, ohne dass der Zuordnungscharakter eine Rolle spielt.

Die elementaren funktionalen Vorstellungen sind eine wichtige Voraussetzung für die Entwicklung funktionalen Denkens. Für die Bearbeitung solcher Aufgaben im Unterricht empfiehlt es sich deshalb, verschiedene Sichtweisen auf die gleiche Situation zu verwenden. Dabei sollten zur Lösung dieser Aufgaben durchaus Funktionseigenschaften genutzt werden, ohne diese explizit zu benennen.

Lösungsmöglichkeiten zur Aufgabe 1e

Sprachliche Darstellung:

Zwei Tafeln Schokolade kosten 1,60 €.

- Eine Tafel ist die Hälfte davon, sie kostet also auch die Hälfte, d. h. 1,60 € : 2 = 0,80 €.
- Fünf Tafeln sind 5-mal so viel wie eine Tafel, also kosten sie auch 5-mal so viel wie eine Tafel, d. h. 0,80 € · 5 = 4,00 €.
- Fünf Tafeln Schokolade kosten 4,00 €.

Tabelle:

Anzahl	Preis
2	1,60 €
1	0,80 €
5	4,00 €

Verhältnisgleichung:

$$\frac{2}{5} = \frac{1,60}{x}$$

$$x = 4,00$$

Anzahl	Preis
2	1,60 €
5	x

Beispiel 6: Proportionale Zusammenhänge erkennen und anwenden

ZLE	Aufgabenstellung	EFP [Streuung]
ZKA (Gym) 2009	Aufgabe 2 a) Ergänze die Tabelle, so dass eine direkt proportionale Zuordnung $y \sim x$ entsteht.	86% [80 %-93 %]
	Gib für diese Zuordnung einen Proportionalitätsfaktor an. ………	33% [18 %-41 %]

x	0	16		48
y	0	4	6	

Einordnung der Aufgabe in das Kompetenzmodell

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
$a^2=5m^2$				P	M	A	D
		x		2	1		

imK: direkt proportionale Zuordnungen vervollständigen

Um die Aufgabe 2a, Beispiel 6, erfolgreich zu bearbeiten, müssen die Schülerinnen und Schüler die gegebene Zuordnung (Proportionalität) erfassen und einen quantitativen Zusammenhang (hier Proportionalitätsfaktor) erkennen.

Offensichtlich gelingt es sehr vielen Schülerinnen und Schülern, die Tabelle richtig zu ergänzen. Vermutlich verwenden sie beim Ergänzen der Tabelle eine wichtige Eigenschaft proportionaler Zuordnungen: das Änderungsverhalten (z. B. x wird verdreifacht, also wird auch y verdreifacht). Die Tabelle lässt sich mit dieser Strategie problemlos ausfüllen, wie nachfolgende Lösungsvariante 1 zeigt.

Lösungsvariante 1 Aufgabe 2a, Beispiel 6:

Änderungsverhalten

$\cdot 3$

$\cdot 2$

x	0	16	24	48
y	0	4	6	12

$\cdot 2$

$\cdot 3$

Dagegen scheint eine Lösungsvariante unter Verwendung eines Proportionalitätsfaktors $(y = k_1 \cdot x \,; x = k_2 \cdot y)$ weniger vorzukommen, denn die Erfüllungsprozentsätze bei der Angabe eines Proportionalitätsfaktors sind deutlich geringer.

Quantitative Zusammenhänge können unterschiedlich beschrieben werden, wie die Lösungsvariante 2 zeigt.

Lösungsvariante 2 Aufgabe 2a, Beispiel 6:

Zuordnungscharakter

$\cdot 4$	x	0	16	24	48	$\cdot \frac{1}{4}$
	y	0	4	6	12	

Durch zusätzliche Angaben in der Aufgabenstellung, wie z. B. Proportionalitätsfaktor, wird die Aufgabe anspruchsvoller. Dies und auch die im Unterricht möglicherweise weniger geübte Form der Darstellung von Proportionalitäten mithilfe von Gleichungen könnten diesen Abfall der Erfüllungsprozentsätze erklären.

Zusätzlich gibt es speziell bei dieser Aufgabe die Besonderheit, dass offenbar ein Proportionalitätsfaktor $k_2 = 4$ als falsch bewertet wurde (siehe Schülerlösung zur Aufgabe 2a).

Schülerlösung zur Aufgabe 2a

a) Ergänze die Tabelle, so dass eine direkt proportionale Zuordnung $y \sim x$ entsteht.

x	0	16	24 ✓	48
y	0	4	6	12 ✓

Gib für diese Zuordnung einen Proportionalitätsfaktor an. $k = 4$

Das ist aber nur dann gerechtfertigt, wenn im Unterricht vorab eindeutig geklärt wurde:

„$y \sim x$ ist gleichbedeutend mit $y = k \cdot x$ bzw. $k = \frac{y}{x}$“.

Für die Entwicklung des funktionalen Denkens ist aber das Erkennen der Zusammenhänge zwischen den beiden Größen bedeutender als das formale Abarbeiten von Kalkülen.

Hinzu kommt, dass sehr wohl Schülerinnen und Schüler wegen Vermeidung eines Bruches eventuell mit $x = 4 \cdot y$ oder „x ist jeweils das Vierfache von y“ gearbeitet haben können.

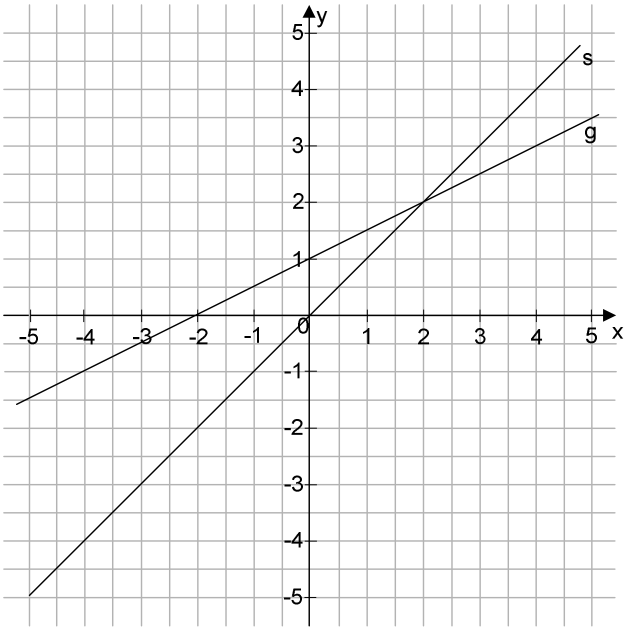
<u>Beispiel 7</u>: Funktionen in verschiedenen Darstellungsformen

Beispiel 7.1

<table>
<tr><th>ZLE</th><th>Aufgabenstellung</th><th>EFP
[Streuung]</th></tr>
<tr><td>VERA 8
2010</td><td><u>Aufgabe 13: Spiegeleien</u>

Teilaufgabe 13.1

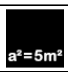
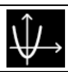
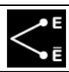
Im abgebildeten Koordinatensystem sind zwei Geraden g und s dargestellt.



Gib eine Gleichung der Geraden g an.

____________________</td><td>24 %[13]
[0 % - 62 %]</td></tr>
</table>

<u>Einordnung der Aufgabe in das Kompetenzmodell</u>

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				Allgemeine mathematische Kompetenzen			
				P	M	A	D
		x					2, 3

imK: Aufgabe 13.1: Funktionale Zusammenhänge erkennen und diese als Gleichung angeben

Die Aufgabe 13.1, Beispiel 7.1, verlangt, eine gegebene Gerade mittels einer Gleichung zu beschreiben. Dazu müssen die Schülerinnen und Schüler die Gerade als Graph einer linearen Funktion interpretieren.

[13] Dieser Erfüllungsprozentsatz ist ein Landesmittelwert aller erfassten Schulen, unabhängig von der Schulform.

Der grafischen Darstellung sind folgende Informationen zu entnehmen:

(1) Die Gerade g schneidet die y-Achse im Punkt $P(0;1)$.

(2) Die zur Geraden g gehörende lineare Funktion hat den Anstieg $\frac{1}{2}$.

Die Schülerinnen und Schüler müssen nun eine geeignete Gleichung für eine lineare Funktion (z. B.: $y = mx + n$) auswählen und die entnommenen Informationen ($m = \frac{1}{2}$ und $n = 1$) einsetzen. Die niedrigen Erfüllungsprozente könnten schlussfolgern lassen, dass eine mögliche Ursache im fehlenden Verständnis für die Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph liegt.

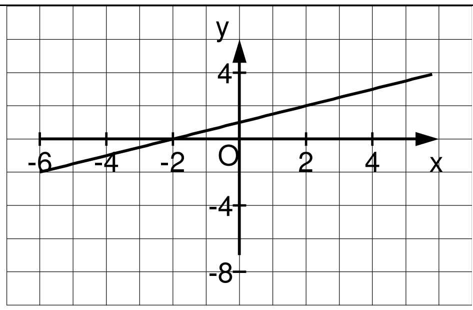
In der folgenden, häufig beobachteten, Schülerlösung der Aufgabe 13.1 erkennt man jedoch, dass die Analyse der grafischen Darstellung erfolgreich war. Trotzdem kann die Lösung nicht akzeptiert werden, da nur ein Term statt einer Gleichung angegeben wird.

Schülerlösung zur Aufgabe 13.1	Fehleranalyse
Gib eine Gleichung der Geraden g an. $\frac{1}{2}x + 1$	Der Anstieg und das absolute Glied werden richtig bestimmt. Die Beschreibung der Geraden g mittels einer <u>Gleichung</u> erfolgt jedoch nicht.

Die Ursache der fehlerhaften Lösung kann vielfältig sein, z. B. oberflächliches Arbeiten.
Denkbar wäre aber auch, dass bei der Behandlung der linearen Funktionen die charakteristischen Eigenschaften (Anstieg, absolutes Glied, …) zunächst stark im Vordergrund standen und den unterschiedlichen Darstellungsformen weniger Beachtung geschenkt wurde.
Lineare Funktionen sind im Schuljahrgang 8 die erste Funktionsklasse, die ausführlich behandelt wird. In Tabellen, Formeln, Diagrammen haben die Schülerinnen und Schüler bisher Abhängigkeiten zwischen Größen untersucht. Jetzt kommt es darauf an, Zuordnungen zu erkennen und diese geeignet darzustellen, z. B. durch eine Funktionsgleichung.
Für die Gestaltung des Mathematikunterrichtes ist es deshalb wichtig, verschiedene Darstellungsformen von Funktionen und damit verbundene Tätigkeitswechsel verstärkt zu berücksichtigen. Ausgehend von der Aufgabe 13.1 könnte man die Schülerinnen und Schüler auffordern, diese Funktion, nennen wir sie f, in verschiedenen Formen darzustellen.

Einige Darstellungsformen der Funktion f

x	-2	1	4	48
y	0	$\frac{3}{2}$	3	25



Jedem Argument x ($x \in R$) wird ein Funktionswert y nach der Vorschrift $y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$ zugeordnet.

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 1, \ x \in R$

$2 \cdot y - x = 2, \ x \in R$

Ordne jeder reellen Zahl x die Hälfte von x vermehrt um 1 zu.

Um den Zuordnungscharakter zu erkennen, müssen die Schülerinnen und Schüler den Blickwinkel auf Tabellen, Formeln, Diagramme ändern. In verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen zeigt sich dieser ganz unterschiedlich (z. B.: „In der waagerecht notierten Wertetabelle erkennt man den Zusammenhang zwischen x und y durch senkrechte Betrachtung.“).
Bei der Gestaltung von Übungen sollte ein häufiger Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen gewährleistet sein.

Aufgabenbeispiel:
Gegeben sind zwei Funktionen g und h durch $x \in R$ und
g:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	-5	-3	-2	-1	3

Aufgabe:
Untersuche, ob es sich bei den Funktionen g und h um lineare Funktionen handelt.

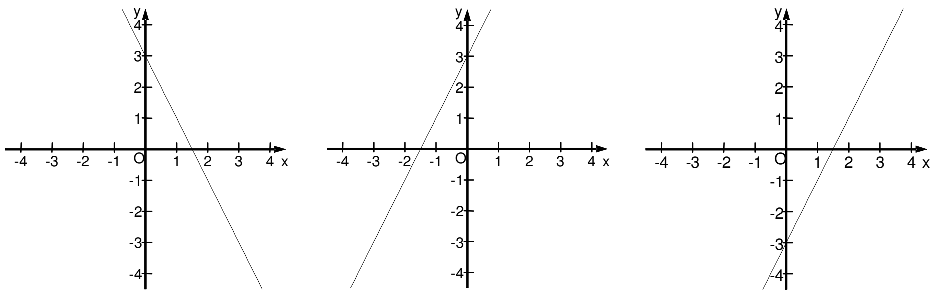
h: $2y - x + 2 = 0$

Je nach Lernstand können zu dieser Aufgabe verschiedene Impulse gegeben werden.
z. B.: - Stelle den Graphen der Funktion g in einem Koordinatensystem dar.
- Stelle die Gleichung der Funktion h nach y um.
- Ermittle eine Gleichung der Funktion g.

Beispiel 7.2

<table>
<tr><th>ZLE</th><th>Aufgabenstellung</th><th>EFP[14]</th></tr>
<tr><td>bLF 2008[15]</td><td>
<u>Pflichtaufgaben Teil 2</u>
Aufgabe 2:
Gegeben sind die linearen Funktionen f und g mit $x \in R$.
f: $y = 3x - 4$
g:
<table>
<tr><td>x</td><td>–2</td><td>–1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>–1</td><td>–3</td></tr>
</table>
a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g in ein und dasselbe Koordinatensystem.
b) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen der Funktionen f und g an.
</td><td>76 %
68 %
61 %</td></tr>
<tr><td>bLF 2009</td><td>
<u>Pflichtaufgaben Teil 2</u>
Aufgabe 2:
Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = -2x + 5 \quad x \in R$.
a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in ein Koordinatensystem.
b) Zeichnen Sie in das gleiche Koordinatensystem eine Gerade g ein, die parallel zum Graphen der Funktion f ist und durch den Punkt P(–1; 0) verläuft.
c) Die Gerade g ist der Graph einer linearen Funktion. Geben Sie den Anstieg dieser Funktion an.
</td><td>45 %
35 %
8 %</td></tr>
<tr><td>bLF 2010</td><td>
<u>Pflichtaufgaben Teil 2</u>
Aufgabe 3:
Eine lineare Funktion f mit $y = f(x)$ ist durch folgende Wertepaare gegeben.
<table>
<tr><td>x</td><td>–2</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>–1</td><td>2</td><td>4</td></tr>
</table>
a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f.
b) Welche der folgenden Funktionsgleichungen gehört zur Funktion f?
A: $y = -x - 1$ B: $y = -x + 1$ C: $y = x - 1$ D: $y = x + 1$
</td><td>64 %
38 %</td></tr>
</table>

[14] Auf die Angabe der Streuungswerte wird bei der besonderen Leistungsfeststellung Mathematik Schuljahrgang 9 verzichtet.
[15] Der Landesmittelwert der Erfüllungsprozentsätze bezieht sich im Jahr 2008 nur auf die Teilnehmenden, die den qualifizierten Hauptschulabschluss erreicht haben. In den Jahren 2009 und 2010 wurde der Landesmittelwert aus den Ergebnissen aller teilnehmenden Schülerinnen und Schüler ermittelt.

ZLE	Aufgabenstellung	EFP [Streuung]
RSA 2008	Pflichtaufgabe 1e Im Bild 2 sind die Graphen von linearen Funktionen dargestellt. Begründen Sie, welcher Graph zur Funktion mit der Gleichung y = 2x + 3 gehört.  Bild 2	46 % [24 % - 70 %]
RSA 2009	Pflichtaufgabe 1c Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion, die die Nullstelle 3 hat und die monoton fallend ist, in ein Koordinatensystem.	71 % [48 % - 93 %]
RSA 2010	Pflichtaufgabe 3 a Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $y = f(x) = x^2 + 6x + 7$, $x \in$ R. Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S des Graphen der Funktion an und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in ein Koordinatensystem mindestens im Intervall $-6 \le x \le 0$ (1 LE $\triangleq$ 1 cm).	70 % [36 % - 91 %] 73 % [40 % - 97 %]

Einordnung der Aufgaben in das Kompetenzmodell

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
a²=5m²				P	M	A	D
		x					**2, 3**

imK: Merkmale von Funktionen bestimmen und Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph herstellen; Graphen zeichnen

Betrachtet man die Erfüllungsprozentsätze der im Beispiel 7.2 ausgewählten Aufgaben aus zentralen Leistungserhebungen der Schuljahrgänge 9 und 10, so fällt auf, dass das grafische Darstellen von Funktionen („… zeichnen Sie den Graphen der Funktion …“) erfreulicher Weise von vielen Schülerinnen und Schülern beherrscht wird. Die Funktionen sind hier in unterschiedlichen Darstellungsformen (verbale Beschreibung, Wertetabelle oder Gleichung) gegeben. Ganz offensichtlich wird diesem Auftrag im Unterricht eine große Bedeutung beigemessen. Die Befunde der Aufgaben zeigen aber auch, dass deutlich weniger

Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, aus der jeweils gegebenen Darstellungsform Eigenschaften von Funktionen zu entnehmen bzw. die zur jeweils gegebenen Funktion gehörende Funktionsgleichung zu ermitteln.

In allen ausgewählten Aufgaben geht es um den 3. Aspekt bei der Entwicklung funktionalen Denkens: Sicht auf Funktion als Ganzes. Funktionen werden als mathematische Objekte mit ganz bestimmten Eigenschaften gesehen. Dabei kann ein und dieselbe Funktion in ganz unterschiedlicher Weise dargestellt werden.

In der Pflichtaufgabe 1e (RSA 2008) und in der Aufgabe 3, Pflichtaufgaben Teil 2, (bLF 2010) wird jeweils genau eine lineare Funktion in jeweils zwei unterschiedlichen Darstellungsformen betrachtet. Die niedrigen Erfüllungsprozentsätze lassen vermuten, dass dies für Schülerinnen und Schüler problematisch ist. Um diese Aufgaben erfolgreich zu bearbeiten, müssen Antworten auf Fragen wie „Welche Eigenschaften lassen sich aus der grafischen Darstellung entnehmen? Wie spiegeln sich diese Eigenschaften in der Funktionsgleichung wider? Welcher Zusammenhang besteht zwischen einzelnen Wertepaaren und der Funktionsgleichung?“ gefunden werden.

In der Pflichtaufgabe 1e (RSA 2008) wird für die Zuordnung des Graphen zur Funktionsgleichung eine Begründung der Entscheidung verlangt. Möglicherweise könnte eine fehlende Begründung (es wurde nur eine Bewertungseinheit vergeben) auch eine Ursache für die geringen Erfüllungsprozentsätze sein.

Schülerlösung zur Pflichtaufgabe 1e (RSA 2008)
Zu Graph II gehört die Gleichung $y = 2x + 3$, denn $+3$ sagt mir, dass die y-Achse bei $+3$ geschnitten wird. Demnach fällt Graph III weg. Die Gleichung $y = 2x + 3$ zeigt eine steigende Gerade und da die Grade im Graph I fällt und bei Graph II steigt, kommt nur Graph II in frage bzw. ist die Lösung.

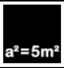
Diese Schülerlösung wird sicher Akzeptanz finden, da die Zuordnung Gleichung – Graph richtig erfolgt und auch in der Begründung schlüssige Argumente enthalten sind.

Für die Weiterarbeit im Unterricht bietet es sich hier z. B. an, Aufgabe und Schülerlösung zum Anlass zu nehmen, um am Funktionsbegriff zu arbeiten. Dabei könnte man Eigenschaften wie Monotonie, Anstieg, Achsenabschnitt herausarbeiten und den Zusammenhang in der jeweiligen Darstellungsart veranschaulichen. Wichtig ist dabei auch, Eigenschaften der Funktion und Eigenschaften des Graphen der Funktion klar zu unterscheiden.

Beispiel 7.3

ZLE	Aufgabenstellung	EFP [Streuung]
RSA 2008	<u>Wahlpflichtaufgabe 4</u> Gegeben sind die Funktionen f und g: f : $y = f(x) = x^2 + 2x$; $x \in R$, g: $y = g(x) = x^3$; $x \in R$.	
	a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g in das gleiche Koordinatensystem mindestens im Intervall $-2 \le x \le 2$.	61 % [21 % - 97 %] 57 % [19 % - 92 %]
	b) Geben Sie das größte Intervall an, in dem beide Funktionen monoton steigend sind.	16 % [0 % - 37 %]

<u>Einordnung der Aufgaben in das Kompetenzmodell</u>

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
				**P**	**M**	**A**	**D**
		x					**2, 3**

imK: Merkmale von Funktionen bestimmen und Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph herstellen; Graphen zeichnen

Diese Wahlpflichtaufgabe wurde von 50 % der Schülerinnen und Schüler gewählt.

Im Beispiel 7.3 verlangt die Wahlpflichtaufgabe 4 (RSA 2008) im Aufgabenteil a zunächst auch das Zeichnen der Funktionsgraphen. Die Erfüllungsprozentsätze der Aufgabe a fallen etwas geringer aus als die in den Aufgaben des Beispiels 7.2, aber das lässt sich durch die anspruchsvolleren Funktionsklassen erklären (quadratische Funktion und Potenzfunktion).

Auffallend sind hier die deutlich geringeren Erfüllungsprozente im Teil b der Wahlpflichtaufgabe 4. Die Erfüllungsprozentsätze betragen im Mittel 16 % und streuen von 0 % bis 37 %. Ähnliches lässt sich auch im Beispiel 7.2, Aufgabe 2c, Pflichtaufgaben Teil 2 (bLF 2009) feststellen. Der Erfüllungsprozentsatz beträgt hier 8 %.

Beide Aufgaben werden von Schülerinnen und Schülern offensichtlich als „schwierige“[16] Aufgabe empfunden, obwohl beide Aufgaben Anforderungen stellen, die laut Vorgabe der entsprechenden Rahmenrichtlinien dem Anforderungsbereich II[17] zuzuordnen sind.

Das größte Intervall anzugeben, in dem beide Funktionen monoton steigend sind, ist möglicherweise eine ungewohnte Forderung. Neben dem begrifflichen Verständnis (Intervall, Monotonie) wird auch eine vergleichende Betrachtung vorausgesetzt. Das Monotonieverhalten von Funktionen zu beschreiben, wurde im Unterricht ganz sicher vielfältig geübt. Auch die vergleichende Betrachtung wird nicht unbedingt Ursache der fehlerhaften Lösungen sein. Die Analyse von Schülerarbeiten zeigte, dass es Probleme gab, das gesuchte Intervall richtig anzugeben. Zum einen erfolgte die Intervalldarstellung fehlerhaft, zum anderen war es problematisch, das größtmögliche Intervall zu finden.

[16] Vgl. S. 10, Analysebericht 2011
[17] Bearbeiten bekannter Sachverhalte, wobei ein Verknüpfen verschiedener Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten erforderlich ist.

Beispiel 8: Funktionen als Mittel zur Beschreibung von Sachproblemen nutzen

ZLE	Aufgabenstellung	EFP [Streuung]
RSA 2009	Wahlpflichtaufgabe 1 Die Berechnung der Kosten für Trinkwasser erfolgt durch die Stadtwerke GmbH einmal im Jahr. Es gilt ein Tarif, der sich aus den Verbrauchskosten und einem Grundpreis zusammensetzt. Verbrauchspreis: 1,39 € je m³ Grundpreis: 0,20 € je Tag Der Grundpreis G (in Euro) hängt von der Anzahl x der Tage ab. Geben Sie eine Gleichung für die Berechnung des Grundpreises G in Abhängigkeit von x an. Stellen Sie den Grundpreis G in Abhängigkeit von x in einem Koordinatensystem grafisch dar.	43 % [19 % - 70 %] 35 % [10 % - 65 %]
RSA 2010	Wahlpflichtaufgabe 1 Die Temperatur wird in Deutschland zumeist in Grad Celsius (kurz: °C) angegeben. In Großbritannien wird die so genannte Fahrenheit-Temperaturskala verwendet, deren Einheit Grad Fahrenheit (kurz: °F) ist. Zwischen beiden Skalen besteht ein linearer Zusammenhang, und es gilt: $0\ °C \triangleq 32\ °F$ $100\ °C \triangleq 212\ °F$ Stellen Sie diesen Zusammenhang zwischen der Temperatur T_F in °F und der Temperatur T_C in °C in einem rechtwinkligen Koordinatensystem grafisch dar. Hinweis: Wählen Sie für T_C die „x-Achse“ und für T_F die „y-Achse“. Geben Sie eine Gleichung $T_F = f(T_C)$ für die lineare Funktion f, die den Zusammenhang zwischen beiden Temperaturskalen beschreibt, an.	74 % [33 % -100 %] 17 % [0 % - 67 %]

Einordnung der Aufgaben in das Kompetenzmodell

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				**Allgemeine mathematische Kompetenzen**			
a²=5m²				P	M	A	D
		x			1, 2		2

imK: Funktionale Zusammenhänge erkennen und diese als Gleichung und in grafischer Form darstellen

Die Wahlpflichtaufgabe 1 (RSA 2009) wurde von 70 % und die Wahlpflichtaufgabe 1 (RSA 2010) von 48 % der Schülerinnen und Schüler des jeweiligen Schuljahrganges bearbeitet.

Im Beispiel 8 wurden Aufgaben ausgewählt, in denen Funktionen zum Beschreiben von Sachverhalten genutzt werden. In beiden Aufgaben sind reale Sachverhalte jeweils durch eine Gleichung und durch eine grafische Darstellung zu beschreiben. Ein Vergleich der Erfüllungsprozentsätze beim Darstellen des jeweiligen Zusammenhangs in einem Koordinatensystem zeigt deutliche Unterschiede: 35 % im Jahr 2009 und 74 % im Jahr 2010. Dieses Ergebnis überrascht nicht, denn in der Wahlpflichtaufgabe 1 (RSA 2010) wurde in einem Hinweis die Einteilung der Koordinatenachsen vorgegeben. Im Fokus der Kompetenzüberprüfung stand hier nicht die Modellierung, sondern das Darstellen von Informationen in grafischer Form.

Im Folgenden stehen die Inhalte der Wahlpflichtaufgabe 1 (RSA 2009) im Mittelpunkt der Betrachtungen, insbesondere der Auftrag „Stellen Sie den Grundpreis G in Abhängigkeit von x in einem Koordinatensystem grafisch dar“. Die einzige Information, die die Schülerinnen und Schüler erhalten, ist die Abhängigkeit G von x. Aus dem Text kann entnommen werden, dass x für die Anzahl der Tage im Jahr steht (maximal 365 oder 360). Eine Vorgabe des darzustellenden Ausschnitts erfolgt nicht. Damit eröffnen sich vielfältige Modellierungsansätze, die durchaus unterschiedlich und trotzdem geeignet sein können.

Ein häufig aufgetretener Fehler war hierbei das Zeichnen der Geraden auch im III. Quadranten des Koordinatensystems (vgl. Darstellung 4, Arbeitsblatt).

Für die Weiterarbeit im Unterricht könnte die Wahlpflichtaufgabe 1 (RSA 2009) besonders wertvoll sein. Anders als in der Mathematik „gewohnt“, gibt es hier eben viele geeignete „Lösungen“. Ein und derselbe Sachverhalt kann auf unterschiedliche Weise betrachtet werden. Je nach Ansatz entstehen auch unterschiedliche Darstellungen. Das Arbeitsblatt auf S. 31 zeigt, wie dieser Sachverhalt im Unterricht vertieft werden könnte. Die Wahlpflichtaufgabe 1 (RSA 2009) wird in veränderter Form für die Weiterarbeit im Unterricht gestellt. Die Schülerinnen und Schüler werden bereits mit verschiedenen Lösungsvarianten konfrontiert und müssen sich mit der Modellierung auseinandersetzen.

So ist z. B. eine Gerade beginnend im Koordinatenursprung (siehe Darstellung 1, S. 31) gut geeignet, um den Grundpreis nach größeren Zeitabschnitten zu entnehmen. Ein Ablesen des Grundpreises nach z. B. sieben Tagen ist jedoch nicht möglich. Dafür würden sich die Darstellungen 2 und 3 des Arbeitsblattes besser eignen. Je nach Lerngruppe könnte man auch auf die unterschiedliche Modellierung des Definitionsbereiches der Funktion G eingehen.

Arbeitsblatt

Aufgabe

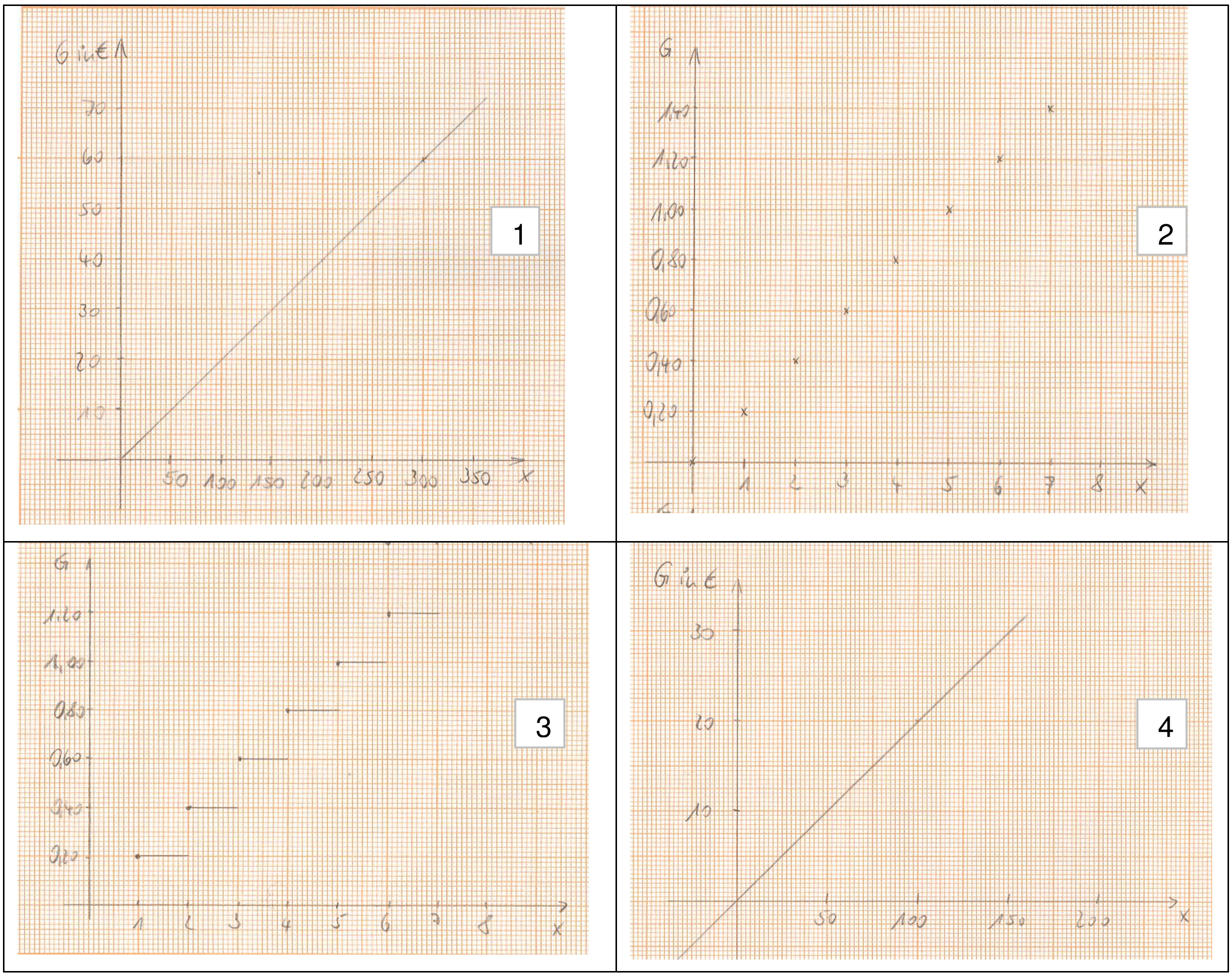
Die Berechnung der Kosten für Trinkwasser erfolgt durch die Stadtwerke GmbH einmal im Jahr. Es gilt ein Tarif, der sich aus den Verbrauchskosten und einem Grundpreis zusammensetzt.

Verbrauchspreis: 1,39 € je m³
Grundpreis: 0,20 € je Tag

Der Grundpreis G wird in Abhängigkeit von x in einem Koordinatensystem grafisch dargestellt.

a) Begründen Sie, weshalb die Darstellung 4 nicht geeignet ist, diesen Sachverhalt zu veranschaulichen.

b) Die Darstellungen 1, 2 und 3 weisen auf eine unterschiedliche Modellierung des Sachverhaltes hin.
Diskutieren Sie Vor- und Nachteile der jeweiligen Modellierung unter Berücksichtigung des jeweilig zugrunde gelegten Definitionsbereiches.



Die gegebenen Sachverhalte im Beispiel 8 sollen auch durch Gleichungen beschrieben werden. Bei dem Aufstellen von Gleichungen für den jeweiligen Sachverhalt sind die erreichten Erfüllungsprozentsätze sehr gering, insbesondere bei der Wahlpflichtaufgabe 1 (RSA 2010). Hier erschwert die gegebene Symbolik das erfolgreiche Bearbeiten. Zusätzlich muss hier die Gleichung einer linearen Funktion ermittelt werden, deren absolutes Glied nicht ganz selbstverständlich ist. In der Wahlpflichtaufgabe 1 (RSA 2009) wurden fehlerhafte Lösungen wie „$0{,}2 \cdot x$“ verstärkt beobachtet. Bereits im Beispiel 7.1 (Aufgabe 13.1, VERA 8) wurde festgestellt, dass Schülerinnen und Schüler nicht unterscheiden zwischen den Objekten Term und Gleichung. Die erfolgreiche Bearbeitung scheitert in solchen Fällen nicht am Erkennen des funktionalen Zusammenhangs, sondern eher am fehlenden „Werkzeug“ bezüglich der Darstellungsformen.

3 Abschließende Orientierung

Die Aufgaben der zentralen Leistungserhebungen Mathematik Sekundarstufe I bilden die Inhalte der zu erreichenden mathematischen Bildung, insbesondere der zu erreichenden allgemeinen mathematischen Kompetenzen, gemäß Rahmenrichtlinien/Lehrplänen sowie Bildungsstandards repräsentativ und damit niveaubestimmend ab. An verschiedenen Stellen des Mathematiklehrganges bieten sie die Möglichkeit, den Stand der Kompetenzentwicklung von Lernenden festzustellen und die tatsächlich vorliegenden Schwierigkeiten der Lernenden zu erkennen. Die Ergebnisse dieses Prozesses sollten Ausgangspunkt für die weitere Gestaltung des eigenen Mathematikunterrichts sein.